Do poniższych zadań wystarcza znajomość wzoru na objętość graniastosłupa i ostrosłupa oraz na pole trapezu i trójkąta, a także wiedza, że w trójkącie równobocznym jego wysokości przecinają się w proporcjach 2:1, w środku geometrycznym trójkąta. Można korzystać także z twierdzenia Pitagorasa oraz Talesa.

Pomimo skomplikowanych (pozornie) wskazówek, zadania są proste obliczeniowo i nie wymagają ani wiele czasu, ani papieru, ani też sprytu, co raczej uwagi. Rozwijają natomiast wyobraźnię przestrzenną.

Gdyby mimo wszystko rozwiązujący utknął, poniżej znajdują się wskazówki.

Zadanie 1. Wyprowadź wzór na promień kuli wpisanej w czworościan foremny o długości krawędzi *a*.

Odp. $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

Zadanie 2. Jakim wzorem wyraża się promień kuli opisanej na czworościanie foremnym o długości krawędzi *a*? Udowodnić wpierw

Lemat: wysokości czworościanu foremnego przecinają się w proporcjach 3:1.

Odp. $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Zadanie 3. Wyprowadź wzór na objętość graniastosłupa ściętego (u obu podstaw) o podstawie trójkąta. (Nb. graniastosłupy o dowolnej podstawie można złożyć z brył o podstawie trójkąta)

Odp. $V = \frac{1}{3}S\cdot(a+b+c)$, gdzie *a, b, c* to długości krawędzi bocznych, a S – pole przekroju poprzecznego graniastosłupa.

Wskazówki:

Ad 1.

I. Czworościan ten można złożyć z czterech mniejszych identycznych, z których każdy za wysokość ma promień kuli.

II. Pole całego czworościanu wyraża się także klasyczną formułą. Znajdź wysokość H bryły.

Ad.2., lemat

I. Rozważ trójkąt, zbudowany na wysokości czworościanu, wysokości ściany bocznej spuszczonej z tego samego punktu oraz części wysokości sąsiedniej ściany (podstawy).

II. Trójkąt ten zostaje przecięty przez inną wysokość czworościanu na dwie części. Jedna z nich jest czworobokiem o dwóch identycznych bokach. Długość tych boków jest szukanym przez Ciebie ułamkiem x wysokości H czworościanu.

III. Powinno wyjść x = 1/4, czyli wysokość dzieli się w proporcji 3/4 : 1/4 = 3:1.

Ad 3.

I. Zetnij graniastosłup prosty tylko u jednej podstawy, np. dolnej.

II Sprawdź, jaką objętość zabiera mu odcięta część (składając ją z dwóch mniejszych części – ostrosłupów o podstawie prostokąta i trójkąta, o tej samej wysokości).

III Wszystkie wielkości staraj się wyrażać poprzez nowe długości a, b, c krawędzi graniastosłupa oraz pole prostopadłego przekroju S (tożsame z polem nie ściętej podstawy górnej). Jedna z krawędzi zachowa swoją oryginalną długość (np. a).

IV Wykaż, że jeśli (w wyniku punktu I.) zetniemy u dołu bryły mniejszą część (krawędzi b i c o mniej), a w zamian zetniemy o tyle samo krawędzi b i c u góry, to ubytek dla początkowego graniastosłupa prostego jest ten sam. (W ten sposób otrzymujemy graniastosłup ścięty dowolnie i niekoniecznie prosty.)