Precesja

Słońce, tak jak obserwujemy je z Ziemi, w swoim pozornym ruchu rocznym wokół niej pozostaje na kole wielkim zwanym *ekliptyką*, podzielonym na 12 odcinków – po jednym znaku Zodiaku każdy – i rotującym w ruchu dobowym (w kierunku wstecznym) wraz ze wszystkimi obiektami na sferze niebieskiej wokół osi świata, a zatem prostopadle do płaszczyzny równika niebieskiego.

Słońce porusza się po ekliptyce (w kierunku prostym) z okresem jednego roku, od punktu Barana w dniu równonocy wiosennej (20.III.) ku najwyższemu na północnej półkuli punktowi na ekliptyce – punktowi Raka (który osiąga dnia 21.VI., i jest wówczas najdłużej i możliwie najwyżej ponad horyzontem), z powrotem zmierzając ku równonocy w punkcie Wagi (22.IX.) i ku najniższemu punktowi, zwanemu punktem Koziorożca (21.XII., wraz z najkrótszym łukiem dziennym i stosunkowo najniższą wysokością nad horyzontem). Zmiany w oświetleniu powodują zmienność pór roku, stosownie do szerokości geograficznej, która odpowiada za relację kątową płaszczyzny horyzontu do płaszczyzny równika.

Płaszczyzna ekliptyki, czyli płaszczyzna, w której Ziemia doznaje przyciągania grawitacyjnego od Słońca i w konsekwencji obiega jego orbitę, nachylona jest pod kątem 23º30’ do płaszczyzny równika niebieskiego – płaszczyzny, w której ruchem dobowym rotuje Ziemia. Grawitacja Słońca (poprzez brak idealnej sferyczności Ziemi i tym samym wypadkowy moment siły) stara się ustawić oś obrotu Ziemi prostopadle do jej orbity.

To powoduje, że Ziemia ulega zjawisku *precesji*, na podobieństwo zwykłego zabawkowego bąka – tyle że o kosmicznych rozmiarach, a zatem znacznie bardziej statecznego i powolnego. Płaszczyzna ekliptyki z okresem około 25,700 lat ustawicznie zmienia swą orientację względem równika niebieskiego (punkty równonocy cofają się z prędkością 50”.3 na rok), nie zmieniając przy tym swego stałego kąta nachylenia 23º.5 do płaszczyzny równika.

Niniejsze opracowanie ma na celu wyjaśnienie i opis **jakościowy** zjawiska precesji (tj., co do jego charakteru, a nie wartości liczbowych).

Z bryłą sztywną o symetrii osiowej, taką jak bąk albo elipsoida ziemska, zwiążemy układ współrzędnych „prim” poruszający się wraz z nią, aby w tym układzie zachowana była stale symetria bryły (kwestia prostoty postaci momentu bezwładności oraz momentu siły zewnętrznej). Pomiędzy układem primowanym (Ziemia) a wzorcowym, inercjalnym (Słońce) występuje względna prędkość kątowa, wywołana przez niezrównoważony moment siły od Słońca, znikający jednak w układzie „prim” dzięki dołożeniu momentu siły pozornej (bąk ma być nieruchomy względem primowanych współrzędnych, a zatem wszystkie momenty sił muszą się w układzie „prim" znieść do zera). Układ „prim" jest w oczywisty sposób nieinercjalny. Przy $\vec{\omega}'$ zachowywać będziemy znak ', aby podkreślić, że nie chodzi nam o dobową częstość kołową Ziemi (prędkość kątową bąka), tylko o chwilową względną prędkość kątową panującą pomiędzy układami odniesienia.

Usiądźmy zatem na powierzchni Ziemi w układzie „prim". Oś *z'* przechodzić będzie niezmiennie przez oś symetrii, czyli oś własnych obrotów naszego bąka. Tensor[1] momentu bezwładności będzie miał wyłącznie wyrazy główne – na diagonali, a dodatkowo, dla bąka przy jego specyficznym kształcie i rozkładzie masy, będziemy mieli $I_{x'} = I_{y'} \neq I_{z'}$. Zapłacimy za to (niewielki) koszt stale zmieniających się w czasie wersorów układu współrzędnych „prim" oraz konieczność dołożenia momentu siły bezwładności.

W artykule *Dynamiczne równanie ruchu w układzie nieinercjalnym* wyprowadziliśmy fundamentalną regułę na zmianę czasową dowolnego wersora bazy obracającego się układu „prim". Zawiera ona chwilową wartość i kierunek względnej prędkości kątowej $\vec{\omega}'$ (prędkości kątowej, z jaką dwa układy obracają się względem siebie) i wyraża się formułą

$$\frac{d}{dt}\hat{e}'_i \;=\; \vec{\omega}\,' \times \hat{e}'_i \quad .$$

Wyliczamy bez trudu, że

$$\vec{L}\,' \;=\; \hat{I}\,'\,\vec{\omega}\,' \;=\; \begin{bmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_{x'} \\ \omega'_{y'} \\ \omega'_{z'} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} I_{x'}\omega'_{x'} \\ I_{y'}\omega'_{y'} \\ I_{z'}\omega'_{z'} \end{pmatrix}.$$

I jesteśmy już gotowi, żeby zapisać dynamiczne równanie ruchu obrotowego – równanie Eulera, analog dynamicznego równania ruchu liniowego Newtona – dla naszej rotującej bryły sztywnej po przejściu do współrzędnych „prim". Stosując konwencję sumacyjną, czyli opuszczając oczywiste znaki sumy przy składowych:

$$\vec{M}\,' \;=\; \frac{d}{dt}\vec{L}\,' \;=$$

$$=\; \frac{d}{dt}\left(L_{i'}\hat{e}\,'_i\right) \;=\; \frac{d\,L_{i'}}{dt}\hat{e}\,'_i + L_{i'}\frac{d\,\hat{e}\,'_i}{dt} \;=\; I_{i'}\frac{d}{dt}\omega_{i'} + \vec{\omega}' \times \vec{L}\,' \quad .$$

---

1 Tensor, bo w ogólności moment pędu nie musi być równoległy (proporcjonalny) do prędkości kątowej. Jego postać zależy mocno od wyboru orientacji układu współrzędnych – od dostosowania się do osi symetrii bryły. Więcej informacji np. tutaj: http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/7bryla-2010.pdf (dostęp VI.2023.)

W pierwszej linijce mamy moment siły, który za chwilę położymy równy zeru. Wektor momentu pędu rozpisujemy we współrzędnych „prim" (druga linijka), w których różniczkują się po czasie zarówno długości jego składowych $L_{i'}$, jak i ich kierunki (wersory bazy); pojawia się też względna prędkość kątowa przejścia z układu wzorcowego do primowanego. Ta właśnie prędkość kątowa, w jej zależności od czasu pozostającej do obliczenia, jest prędkością kątową precesji.

Wykonajmy ostatni iloczyn wektorowy z drugiego wiersza:

$$\vec{\omega}' \times \vec{L}' = \begin{vmatrix} \hat{e}'_x & \hat{e}'_y & \hat{e}'_z \\ \omega'_{x'} & \omega'_{y'} & \omega'_{z'} \\ I_{x'}\omega'_{x'} & I_{y'}\omega'_{y'} & I_{z'}\omega'_{z'} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_{y'}\omega'_{z'}(I_{z'}-I_{y'}) \\ \omega'_{x'}\omega'_{z'}(I_{x'}-I_{z'}) \\ \omega'_{x'}\omega'_{y'}(I_{y'}-I_{x'}) \end{pmatrix} .$$

W układzie primowanym, wypadkowy moment siły $\vec{M}' = \vec{0}$, ponieważ bąk jest stacjonarny względem współrzędnych „prim". Pomimo występowania momentu siły od Słońca, nie obserwujemy w układzie odniesienia „prim" żadnego wynikającego zeń przyspieszenia obrotowego Ziemi, bo cały układ współrzędnych obraca się dokładnie wraz z bryłą, i moment siły pozornej równoważy moment siły grawitacji słonecznej. Symetria osiowa *x'-y'* oraz specyficzny kształt bąka dają $I_{x'} = I_{y'} < I_{z'}$. Kierunek znaku nierówności jest bez znaczenia, ważne jest jedynie, że rozkład masy po *x'-y'* jest inny niż po *z'* (brak idealnej symetrii sferycznej, przy zachowaniu symetrii osiowej bąka). Kula ziemska nie jest kulą, tylko zniekształconą elipsoidą obrotową.

Narzucone powyżej warunki powodują, że nasze równanie Eulera przyjmuje postać (kropka oznacza pochodną po czasie, zgodnie z konwencją Izaaka Newtona):

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\omega}'_{x'} + \omega'_{y'}\frac{\omega'_{z'}(I_{z'}-I_{x'})}{I_{x'}} \\ 0 &= \dot{\omega}'_{y'} - \omega'_{x'}\frac{\omega'_{z'}(I_{z'}-I_{x'})}{I_{x'}} \\ 0 &= I_{z'}\dot{\omega}'_{z'} \end{aligned} .$$

Ostatnie równanie daje nam $\omega'_{z'} = Const$; wektor względnej prędkości kątowej ma koniec „uwięziony" na jednej i tej samej wysokości. Tym samym, wspólny wyraz zapisany za pomocą ułamka w równaniach 1. i 2. jest stałą, nazwijmy ją $\Omega := \frac{\omega'_{z'}(I_{z'}-I_{x'})}{I_{x'}}$. Ma ona wymiar prędkości kątowej (częstości kołowej). Równania pokazują nam również, że gdy kierunek wektora $\vec{\omega}'$ pokrywa się z osią symetrii (kierunkiem *z'*), efekt precesji nie występuje wcale – wektor $\vec{\omega}' = \vec{Const}$ w swojej jedynej składowej *z'*-owej. Odpowiada to sytuacji, w której Słońce wykonało już swoją „robotę” i ustawiło Ziemię, aby rotowała w ruchu dobowym dokładnie w płaszczyźnie orbitalnej. Tak samo, przy wszystkich jednakowych składowych tensora momentu bezwładności – to jest przy doskonałej sferycznej symetrii, czyli pełnej kulistości Ziemi – z precesją nie mamy wcale do czynienia. Słońce wówczas nie ma jak wymusić zmian orientacji.

Mamy więc

$$\begin{gathered}\dot{\omega}'_{x'} + \omega'_{y'}\Omega = 0\\ \dot{\omega}'_{y'} - \omega'_{x'}\Omega = 0 \\ \omega'_{z'} = Const\end{gathered} \quad .$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $\omega'_{y'} = \frac{-\dot{\omega}'_{x'}}{\Omega}$ i podstawiamy do drugiego:

$$\frac{-\ddot{\omega}'_{x'}}{\Omega} - \omega'_{x'}\Omega = 0 \iff \ddot{\omega}'_{x'} + \omega'_{x'}\Omega^2 = 0 \quad .$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego (por. artykuł autora *Siła oporu lepkiego*, paragraf 2.1). Jego rozwiązanie to $\omega'_{x'} = \omega'_{x'0}\cos(\Omega t + \varphi)$. Ω jest faktycznie częstością kołową. Ale zróżniczkujmy nasze rozwiązanie i podstawmy do równania pierwszego, żeby wyznaczyć $\omega'_{y'}$:

$$\begin{gathered}\dot{\omega}'_{x'} = -\Omega\,\omega'_{x'0}\sin(\Omega t + \varphi) ;\\ \omega'_{y'} = \omega'_{x'0}\sin(\Omega t + \varphi) \quad .\end{gathered}$$

Zarówno po *x’*, jak i po *y’*, mamy do czynienia z oscylacją z tą samą amplitudą, częstością i przesunięciem w fazie (*cosinus* vs. *sinus*) o ćwierć okresu; to zaś nieuchronnie oznacza ruch po okręgu. Wektor $\vec{\omega}'$ obraca się jednostajnie po tworzącej stożka, jego koniec zatacza regularne koło wokół osi symetrii, a długość wektora jest stała. Stożek ten nazywa się *stożkiem polhodii*. Oczywiście, kwestia, czy mówimy o rotacji względnej prędkości kątowej wokół osi *z’*, czy też raczej osi *z’* (dla Ziemi tożsamej z osią świata, osią rotacji dobowej) wokół niezmiennej orientacji normalnej do wzorcowej płaszczyzny orbitalnej, a zatem względem płaszczyzny ekliptyki, jest kwestią wygody (i wyczucia przyczynowości).

Widzimy więc, że istotnie, płaszczyzna obrotu dobowego Ziemi będzie wykonywała rotację w jednostajnym tempie względem płaszczyzny ekliptyki, a jako że dla obserwatora na Ziemi równik niebieski jest stałym zjawiskiem, będzie on postrzegał ustawiczną zmianę orientacji płaszczyzny ekliptyki, a co za tym idzie, powolny i ustawiczny ruch punktów równonocy, w których obie te płaszczyzny przecinają się na sferze niebieskiej.

Z tego to powodu roczniki astronomiczne ze współrzędnymi gwiazd na sferze niebieskiej trzeba co epokę (50 lat) aktualizować, ponieważ jeden z podstawowych kątów sferycznych, rektascensja (*right ascension*) liczony jest od punktu Barana do gwiazdy, a punkt ten ustawicznie ulega ruchowi wstecznemu wskutek precesji. Nie ma w tej kwestii wielkiego wyboru, gdyż układ współrzędnych, w którym położenie gwiazdy można opisać w niezależny od czasu, skatalogowany sposób, musi leżeć na równiku niebieskim i rotować wraz z nim – aby wskazywał zawsze ten sam kąt (tę samą wartość współrzędnej) w dowolnym momencie dnia i nocy. Punkty takie jak np. punkty kardynalne horyzontu: N, E, S, W, albo punkty na południku lokalnym nie mają tej właściwości – w każdym momencie doby mają inną orientację względem punktów obracających się na sferze niebieskiej.

Autor: Marek Pietrachowicz